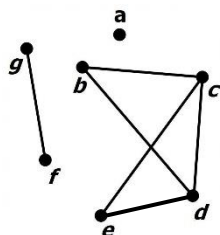


سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	تعداد صفحه: ۲	نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی - فیزیک
تاریخ امتحان : ۱۴۰۱/۱۰/۰۳	ساعت شروع: ۱۰ صبح	پایه دوازدهم	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۴۰۱			
مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش و پرورش http://aee.medu.gov.ir			

ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.)	نمره
------	---	------

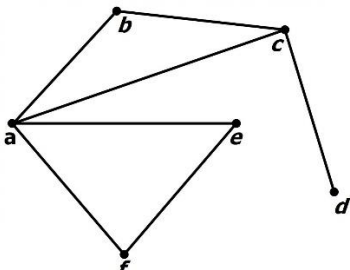
۱	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید: الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است. ب) اگر $a b+c$ آنگاه $a b$ یا $a c$. پ) برای مقادیر حقیقی و نا صفر a و b به شرط آنکه $a+b \neq 0$ تساوی $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار است. ت) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۶ وجود ندارد.	۱
۲	در جاهای خالی عبارت های مناسب بنویسید . الف) حاصل $([m^r, m], m^s)$ برابر با است . ب) اگر برای دو عدد صحیح و نا صفر a و b داشته باشیم $(a, b) = 1$ ، می گوییم a و b هستند. پ) یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از راس هایش دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر می نامیم. ت) تعداد یال های گراف K_7 برابر است.	۱
۳	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید: « برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1)$ »	۱
۴	اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(4m + 5)$ و $(6m + 5)$ بر a بخشپذیر باشند ثابت کنید $a = \pm 1$.	۱/۲۵
۵	اگر a و b عددی صحیح و فرد باشد و در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $(a^2 + b^2 + 5)$ را بر ۸ بیابید.	۱
۶	باقی مانده تقسیم عدد $20! + 19! + 18! + 17! + 16! + 15! + 14! + 13! + 12! + 11! + 10! + 9! + 8! + 7! + 6! + 5! + 4! + 3! + 2! + 1!$ بر ۱۵ بدست آورید. (! نماد فاکتوریل می باشد)	۱/۵
۷	معادله همنهشتی $4x \equiv 10 \pmod{6}$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن به دست آورید.	۱
۸	در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف) تعداد رئوس یک گراف را (اندازه ، مرتبه) می نامیم. ب) گرافی را همبند می نامیم که بین هر دو رأس آن یک (مسیر ، یال) وجود داشته باشد. پ) اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر با $(n(n-1))$ ، $\frac{n(n-1)}{2}$ (است. ت) گراف C_n تنها یک (دور ، مسیر) n رأسی دارد.	۲
۹	گراف G (شکل مقابل) را در نظر بگیرید: الف) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب) دوری به طول ۴ بنویسید. پ) دو مسیر به طول ۳ با شروع از راس b بنویسید . ت) $N_G(f)$ را با اعضا مشخص کنید.	۱/۵



«ادامه سؤالات در صفحه دوم»

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	تعداد صفحه: ۲	نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی - فیزیک
تاریخ امتحان : ۱۴۰۱/۱۰/۰۳	ساعت شروع: ۱۰ صبح	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۴۰۱			
مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir			

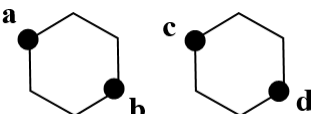
ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.)	نمره
------	--	------

۱۰	عدد احاطه گری را برای گراف زیر مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.	۱
		
۱۱	یک گراف ۲-منتظم ۱۲ راسی بکشید که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.	۱
۱۲	می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم . اگر بخواهیم هر نفر روبه روی برادرش بنشیند ، این کار را به چند روش می توان انجام داد؟	۱
۱۳	به چند روش می توان از بین ۵ نوع گل ۱۶ شاخه گل انتخاب کرد به طوریکه ، از گل نوع سوم فقط ۳ شاخه و از گل نوع چهارم دست کم سه شاخه و از گل نوع پنجم بیش از چهار شاخه انتخاب کنیم؟	۱/۷۵
۱۴	قرار است سه مدرس T_1, T_2, T_3 در سه جلسه متوالی در سه کلاس C_1, C_2, C_3 به گونه ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور، با استفاده از مربع لاتین، برنامه ریزی کنید.	۱/۲۵
۱۵	چند عضو از مجموعه $S = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 630\}$ نه بر ۳ و نه بر ۵ بخشپذیرند؟	۱/۵
۱۶	هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ انتخاب می کنیم، ثابت کنید حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها کمتر از $\sqrt{8}$ است.	۱/۲۵
	"موفق باشید"	جمع نمره ۲۰

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۰۳	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور دی ماه سال ۱۴۰۱		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	الف) درست (۰/۲۵) (ب) نادرست (۰/۲۵) (پ) نادرست (۰/۲۵) (ت) درست (۰/۲۵)	۱
۲	الف) m^2 (۰/۲۵) (ب) نسب به هم اول (۰/۲۵) (ص ۱۳) (پ) مینیمال (۰/۲۵) (ص ۴۶) (ت) ۲۱ (۰/۲۵) (ص ۳۸)	۱
۳	(۰/۲۵) $y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + 2x + 1 \geq 0$ (۰/۲۵) (ص ۷ و ۸) (۰/۲۵) این رابطه بازگشتی همواره بدیهی است $\Rightarrow (x + 1)^2 + (x + y)^2 \geq 0$ (۰/۲۵)	۱
۴	(ص ۱۱) (۰/۲۵) $a = \pm 1 \Rightarrow a \mid 1$ (۰/۲۵) $a \mid 5(\epsilon m + 5) - 6(\delta m + 4)$ (۰/۲۵) $a \mid 6(\delta m + 4)$ (۰/۲۵) $a \mid 5(\epsilon m + 5)$	۱/۲۵
۵	می دانیم مربع هر عدد فرد، به صورت $8k + 1$ می باشد (۰/۲۵) $(k \in \mathbb{Z})$ پس داریم (ص ۱۶) $\begin{cases} a^2 = 8k + 1 \\ b^2 = 8k' + 1 \end{cases} \rightarrow a^2 + b^2 + 5 = 8k + 1 + 8k' + 1 + 5 = 8k'' + 7 \rightarrow r = 7$ (۰/۲۵)	۱
۶	میدانیم $1! \equiv 1$ و $2! \equiv 2$ و $3! \equiv 6$ و $4! \equiv 24$ و $5! \equiv 120$ و پس داریم (ص ۲۹) $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 200! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + \dots + 200! \equiv 3$ (۰/۲۵)	۱/۵
۷	چون $20 \mid (12, 8)$ معادله جواب دارد (۰/۲۵) (ص ۳۰) $4x \equiv 10 \rightarrow 4x \equiv 4$ (۰/۲۵) $\rightarrow x \equiv 1$ (۰/۲۵) $\rightarrow x = 3k + 1$ (۰/۲۵)	۱
۸	الف) مرتبه (۰/۵) (ب) مسیر (۰/۵) (پ) $\frac{n(n-1)}{2}$ (۰/۵) (ت) دور (۰/۵) (ص ۳۸ و ۳۵)	۲
۹	الف) $\delta(G) = 0$, $\Delta(G) = 3$ (۰/۵) (ب) $cbcd b$ (۰/۲۵) (پ) $bdce$ یا $bced$ یا $bdce$ دو مورد هر کدام (۰/۲۵) (ت) $N_G(f) = \{g\}$ (۰/۲۵) (ص ۴۱)	۱/۵
۱۰	روش اول می دانیم $\left \frac{n}{\Delta + 1} \right \leq \gamma(G)$ پس داریم (۰/۲۵) $\left[\frac{6}{5} \right] \leq \gamma(G)$ بنابراین (۰/۲۵) $2 \leq \gamma(G)$ و با توجه به $\{a, d\}$ داریم (۰/۲۵) $\gamma(G) \leq 2$ و لذا (۰/۲۵) $\gamma(G) = 2$ روش دیگر: این گراف با مجموعه دو عضوی $\{a, d\}$ احاطه می شود. پس عدد احاطه گری این گراف کوچکتر یا مساوی ۲ است یعنی $\gamma(G) \leq 2$ (۰/۲۵). اما اگر $\gamma(G) = 1$ یعنی گراف یک رأس دارد که تمام رئوس را احاطه می کند یعنی رأس از درجه ۵ باید در گراف وجود داشته باشد که چنین رأسی وجود ندارد. (۰/۲۵) و لذا $\gamma(G) > 1$ (۰/۲۵) بنابراین $1 < \gamma(G) \leq 2$ و لذا $\gamma(G) = 2$ (۰/۲۵). (ص ۳۹)	۱
«ادامه در صفحه ۲»		

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۰۳		
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور دی ماه سال ۱۴۰۱	مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir		

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره									
۱۱	رسم شکل با مشخص کردن نقاط احاطه گری آن (انمره)  (ص ۵۳) (به شکل های دیگر نیز نمره داده شود). مانند: 	۱									
۱۲	(۰/۷۵) $4! \times 2^4 = 384 (۰/۲۵)$ (ص ۷۱)	۱									
۱۳	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16 \quad x_2 = 3 \quad x_4 \geq 3, x_5 \geq 5 (۰/۵) \xrightarrow{x_2=3, x_4=y_2+3, x_5=y_5+5}$ $x_1 + x_2 + 3 + y_4 + 3 + y_5 + 5 = 16 (۰/۲۵) \quad x_1 + x_2 + y_4 + y_5 = 5 \quad x_i \geq 0, y_i \geq 0 (۰/۲۵) \rightarrow$ $\binom{5+4-1}{4-1} = 56 (۰/۷۵)$ (ص ۷۱)	۱/۷۵									
۱۴	فرض کنیم هر سطر نشان دهنده هر کلاس و اعداد ۱، ۲ و ۳ در مربع لاتین نمایانگر مدرس های حاضر در کلاس باشند. (۰/۲۵) طبق مربع لاتین 3×3 زیر هر مدرس در هر جلسه در یک کلاس حاضر می شود و در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس دارد. (۰/۲۵) (ص ۶۲) <table border="1" data-bbox="183 1097 359 1254"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> (۰/۷۵)	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱/۲۵
۱	۲	۳									
۳	۱	۲									
۲	۳	۱									
۱۵	$\overline{A \cup B} = s - A \cup B = s - A - B + A \cap B (۰/۲۵)$ (ص ۸۳) $s = 630 (۰/۲۵), A = 210 (۰/۲۵), B = 126 (۰/۲۵), A \cap B = 42 (۰/۲۵)$ $\Rightarrow \overline{A \cup B} = 336 (۰/۲۵)$	۱/۵									
۱۶	ابتدا مستطیل مورد نظر را به ۶ مربع به ضلع ۲ تقسیم می کنیم و هر قسمت را یک لانه فرض می کنیم و هفت نقطه را هفت کبوتر در نظر می گیریم (۰/۲۵) طبق اصل لانه کبوتری دست کم یک لانه وجود دارد که شامل دو کبوتر است (ص ۸۴) (۰/۲۵) با توجه به قضیه فیثاغورس داریم: $AB^2 = AC^2 + BC^2 \rightarrow AB^2 < 2^2 + 2^2 (۰/۲۵) \Rightarrow AB^2 < 8 (۰/۲۵) \Rightarrow AB < \sqrt{8} (۰/۲۵)$	۱/۲۵									
۲۰	جمع نمره										

«همکاران گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»